

Zu zeigen:

$$(2) \quad \mathcal{L}^1(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(B_n)$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert eine

abzählbare Familie $([a_i^n, b_i^n])_{i \in I_n}$

mit

$$(3) \quad \mathcal{L}^1(B_n) + 2^{-n} \varepsilon \geq \sum_{i \in I_n} (b_i^n - a_i^n)$$

(Def. von $\mathcal{L}^1$ als "inf") und

$$(4) \quad B_n \subset \bigcup_{i \in I_n} [a_i^n, b_i^n].$$

Es gilt nach (1) + (4)

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i \in I_n} [a_i^n, b_i^n],$$

rechts steht eine abzählbare Vereinigung
von Intervallen $\implies$
Def. von $\mathcal{L}^1$

$$\mathcal{L}^1(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i \in I_n} (b_i^n - a_i^n) \right)$$

$$\stackrel{(3)}{<} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(B_n) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}.$$

Da ε beliebig ist, folgt (2):

$\mathcal{L}^1$ ist ein Maß auf $\mathbb{R}$.

(iii) Sei $A \neq \emptyset$ offen. Dann enthält
 A ein Intervall positiver Länge, und

(iii) folgt aus

(ii) Sei $\mathcal{J} := [a, b]$ mit $a \leq b$

$$\text{aus } \mathbb{R} \xrightarrow[\text{Def. } \mathcal{L}^1]{} \mathcal{L}^1([a, b]) \leq b - a.$$

Zu zeigen ist

$$b - a \leq \sum_{i \in I} (b_i - a_i) \quad (*)$$

für jede höchstens abzählbare Überdeckung

$$\mathcal{J} \subset \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i].$$

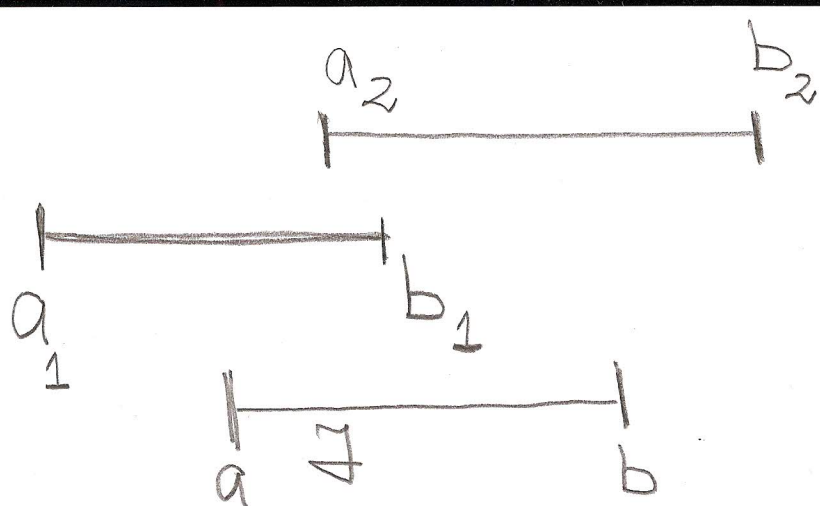
Durch „inf Bildung“ rechts in (*) folgt

$$\mathcal{L}^1(\mathcal{J}) \geq b - a.$$

ad (*):

Fall 1 :

$$\# I < \infty$$



$$(\# I = 2)$$

(*) gilt trivial!

Fall 2 : $\# I = \infty$

O.E. $I = \mathbb{N}$; sei $\varepsilon > 0$ gegeben

$$\varepsilon_i := 2^{-i} \varepsilon \implies J = [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i - \varepsilon_i, b_i + \varepsilon_i)$$

J kompakt $\implies \exists N$ mit

$$J \subset \bigcup_{i=1}^N (a_i - \varepsilon_i, b_i + \varepsilon_i)$$

$$\implies J \subset \bigcup_{i=1}^N [a_i + \varepsilon_i, b_i + \varepsilon_i]$$

// "Fall 1" liefert

$$b - a \leq \sum_{i=1}^N (b_i - a_i) + 2 \sum_{i=1}^N \varepsilon_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) + 2\varepsilon.$$

Wegen der Beliebigkeit von ε folgt $(*)$.

Somit ist gezeigt:

$$\mathcal{L}^1([a, b]) = b - a \quad \forall a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Die Monotonie von $\mathcal{L}^1$ kombiniert mit dieser Gleichung liefert

$$\underbrace{\mathcal{L}^1([a+\varepsilon, b-\varepsilon])}_{= b-a-2\varepsilon} \leq \mathcal{L}^1([a, b]) \leq$$

$$\mathcal{L}^1([a-\varepsilon, b+\varepsilon]) = b-a + 2\varepsilon$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{L}^1(a, b) = b-a.$$

Für halboffene (endliche) Intervalle J schließt man analog. Sei J unbeschränkt. Die Monotonie von $\mathcal{L}^1$ zusammen mit der Formel für beschränkte Intervalle ergibt

$$\mathcal{L}^1(J) = +\infty.$$

(iv) Offenbar $\mathcal{L}^1(\{a\}) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Ist N abzählbar, also $N = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$,

so folgt

$$\mathcal{L}^1(N) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathcal{L}^1(\{a_n\})}_{=0} = 0.$$



Def 23.3: Sei μ ein Maß auf der
(beliebigen) Menge X .

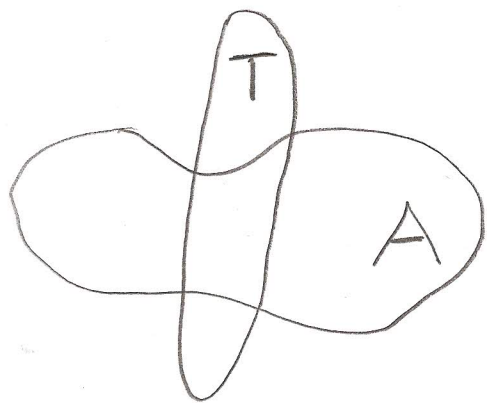
a) Für $A \subset X$ sei

$$\mu \llcorner A: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty],$$

$$(\mu \llcorner A)(B) := \mu(A \cap B).$$

$\mu \llcorner A$ heißt die Einschränkung von μ
auf A . (Zeige: $\mu \llcorner A$ ist ein Maß!)

b) (μ -messbare Mengen) !



$A \subset X$ heißt μ -messbar, wenn A
jede Testmenge T
additiv zerlegt, d.h.:

$$\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T - A)$$

$$\forall T \in \mathcal{X}$$

(Definition von Caratheodory)

Bem zur Messbarkeit:

$$1.) \quad \mu(T) \leq \mu(T \cap A) + \mu(T - A)$$

gilt immer, da

$$T = (T \cap A) \cup (T - A)$$

Nun benutze die Subadditivität. Es ist also nur $\mu(T) \geq \dots$ zu prüfen.

Beweise als Übung:

$$2.) \quad \begin{cases} \emptyset, X \text{ } \mu\text{-messbar;} \\ \mu\text{-Nullmengen sind } \mu\text{-messbar} \end{cases}$$

3.) sei $\mathcal{C} \subset X$ beliebig; dann gilt:

$$\boxed{A \subset X \quad \mu\text{-messbar} \implies A \text{ ist } (\mu \ll \mathcal{C})\text{-messbar}}$$

4.) (Komplementregel)

$$\begin{cases} A \subset X \quad \mu\text{-messbar} \\ X-A \quad \mu\text{-messbar} \end{cases} \iff$$

Satz 23.2 : (Eigenschaften messbarer Mengen, Rechenregeln)

Sei μ ein Maß auf der Trägermenge X ,

$\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge messbarer μ -Mengen.

Dann gilt:

(i)

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

sind μ -messbar

(ii)

$$A_k \cap A_l = \emptyset \text{ für } k \neq l \implies$$

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

(σ -Additivität auf disjunkten
 μ -messbaren Mengen)

(iii)

$$A_k \subset A_{k+1} \quad \forall k \implies$$

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$

(iv)

Ist $\mu(A_{k_0}) < \infty$ für ein k_0

und $A_{k+1} \subset A_k$ für alle k , so

~~folgt~~
folgt

$$\mu \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$

- σ -Algebra $\mathcal{M}$

- Maßraum
 $(X, \mathcal{M}, \mu)$

bereits definiert ∇

① Konstruktion nicht $\mathcal{L}^1$ -
messbarer Teilmengen von $\mathbb{R}$:

{ Hewitt - Stromberg,
Real and abstract analysis. Springer
Theorem 10.28 auf p. 135.

benutzt wird das Auswahlaxiom;
anscheinend (vgl. Fußnote auf p. 136)

ist es unmöglich, ohne II
das Axiom solche Mengen
zu konstruieren (Stand 1965)

② "Cantor Menge" C :

Konstruktion vgl. Kavallo,
Analysis 2, p. 22 + 23

- C gleichmächtig zu $[0, 1]$
- C abgeschlossen
- $\mathcal{L}^1(C) = 0$

(siehe auch Rudin, Real and
complex analysis, p. 179)

interessanter Bezug zur
"Hauptsatzfrage"

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ stetig auf } [a, b], \quad f' \text{ existiert} \\ \mathcal{L}^1 - f.ü. \quad \Rightarrow \quad \int_a^x f(t) d\underline{\mathcal{L}^1(t)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} ?? \\ \circ \quad \circ \end{array}$$

Antwort nein:

Konstruktion ^{von} $f \neq 0$ (stetig)
mit $f'(x) = 0$ für $x \notin G$
(also Ableitung $\mathcal{L}^1 - f.ü.$
definiert und $= 0$)

$\Rightarrow$ Formel falsch!

Literatur: Federer, GMT, Springer